

# MODELO DE DISCO ACTUADOR ROTANTE PARA LA SIMULACION DE UNA TURBINA EOLICA DE EJE HORIZONTAL

Ricardo A. Prado

Departamento de Mecánica Aplicada

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue  
calle Buenos Aires No.1400, (8300) Neuquén - Argentina

prado@uncoma.edu.ar

tel.(+54-99) 42-2836, fax (+54-99) 42-4874/48-8304

## RESUMEN

Se complementa la formulación un modelo para la predicción de los parámetros característicos de una turbina eólica de eje horizontal basado en la aplicación de la teoría de la cantidad de movimiento, con la incorporación de la rotación del disco actuador. Se determinan las pérdidas adicionales por efecto de la rotación y los correspondientes coeficientes de torque y potencia del nuevo modelo.

## INTRODUCCION

Entre los más simples modelos desarrollados para predecir la performance de turbinas eólicas de eje horizontal mediante la aplicación de la denominada *teoría de la cantidad de movimiento*, se encuentra el de Betz, originado por la adaptación de la teoría de Rankine-Froude (modelo descripto, entre otros, por Le Gourières (1982) y Bastianón (1994)), y los modelos propuestos por Dymont (1989) y Prado (1994, 1995), que modifican al modelo de Betz con la finalidad de incorporar las pérdidas. Ninguno de estos modelos incluyen la rotación del denominado *disco actuador* que simula a la turbina.

El modelo descripto por Prado (1995) modela al tubo de corriente  $\tau$ , el cual encierra al aire que fluye a través del disco actuador que representa a la turbina eólica, mediante la superposición potencial de una fuente puntual y una corriente uniforme. Esta representación conduce a una serie de parámetros de la turbina que, si bien incluyen la presencia de pérdidas, éstas no se deben a la rotación del flujo dentro del tubo de corriente  $\tau$ . Con la finalidad de mejorar al modelo propuesto anteriormente y así obtener las pérdidas debida a la rotación del flujo, se ha incorporado la rotación del disco actuador. Se considera entonces, de manera semejante a otros modelos que incluyen rotación, como los presentados en Hurt (1981) y en Eggleston & Stoddard (1987), que el disco actuador rota a una velocidad angular uniforme,  $\Omega$ , imprimiendo esa rotación solamente a la porción del fluido que se encuentra corriente abajo del mismo disco. Asimismo, se establece que el disco actuador se ubica sobre el origen de coordenadas, en coincidencia con la posición de la fuente puntual ( $e = 0$ ).

## FORMULACION DEL MODELO Y CALCULO DE LOS PARAMETROS

Aplicando las ecuaciones integrales del movimiento de fluidos, White (1983), que comprenden a las ecuaciones de: continuidad (1), conservación de la cantidad de movimiento lineal (2), conservación de la cantidad de movimiento angular (3) y conservación de la energía -primer principio de la termodinámica- (4), al tubo de corriente  $\tau$  representado mediante un volumen de control fijo e indeformable, siendo estacionario el flujo en su interior, y definiendo un sistema de referencia inercial adherido al tubo de corriente, con origen en el centro del disco, resultan

$$\oint_{\tau} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{F} = \oint_{\tau} \vec{V} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_0 = \oint_{\tau} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \quad (3)$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \oint_{\tau} \left( \tilde{u} + \frac{1}{2} V^2 + g \cdot h + \frac{p}{\rho} \right) \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \quad (4)$$

donde

- $\rho$ , densidad del aire
- $\vec{V}$ , vector velocidad local del flujo (incluyendo al viento y a la rotación de la estela), con módulo  $V$
- $\hat{n}$ , versor normal a la superficie del tubo de corriente  $\tau$
- $\vec{F}$ , fuerzas actuantes sobre el volumen de control
- $\vec{M}_0$ , momentos referidos al origen de coordenadas de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control
- $\vec{r}$ , vector posición al origen de coordenadas
- $\dot{Q}$ , calor suministrado, por unidad de tiempo
- $\dot{W}_g$ , trabajo cedido por unidad de tiempo, es decir, potencia al eje
- $\tilde{u}$ , energía interna por unidad de masa
- $g$ , aceleración de la gravedad
- $h$ , coordenada medida en sentido contrario al del vector gravedad  $\vec{g}$
- $p$ , presión estática absoluta

Una porción finita del volumen de control se grafica en la Figura 1, donde las coordenadas se adimensionalizan con el radio del disco,  $R$ . El aire que fluye dentro del tubo de corriente  $\tau$  va sufriendo una expansión pues se va retardando por entregar parte de su energía al rotor. Por ello, la velocidad del viento en el plano del disco es menor que la velocidad no perturbada del viento, siendo igual  $V_\infty(1-a)$ , donde  $a$  denota al coeficiente de reducción de velocidad en el disco ( $0 < a < 1$ ) y  $V_\infty$  representa a la velocidad de viento no perturbada. A medida que el aire fluye corriente abajo del disco actuador, sigue disminuyendo su velocidad, pero ahora comparte además un movimiento de rotación, de modo que sus partículas describen trayectorias helicoidales de paso constante, tal como fue descrito por Prado y Rodríguez (1995) para su modelo de estela vorticosa.

Para adaptar el nuevo modelo al preexistente, se ha considerado que la velocidad angular  $\Omega$  del disco se relaciona con el coeficiente  $a$  mediante la definición del cuerpo semi-infinito de Rankine (Figura 1), el cual tiene un radio  $\sqrt{a}R$  en  $z = 0$ . Si en  $z = 0$ , el flujo entre el cuerpo, el cual rota a velocidad angular constante  $\omega_0$ , y el tubo de corriente  $\tau$  (Figura 2.A) debe admitir el mismo impulso angular que adquiriría del disco actuador, de radio  $R$ , (Figura 2.B) la velocidad angular del disco debe ser  $\Omega = 2a\omega_0$ . Así, la razón de velocidades sobre el borde del disco,  $\sigma = \Omega R / V_\infty$ , resulta  $\sigma = 2a\sigma_0 = 2a\omega_0 R / V_\infty$ .

Verificando las ecuaciones (1) a (4) dentro del volumen de control definido por  $\tau$  y en el interior de cada uno de los dominios I y II, es decir, anterior y posterior al disco, respectivamente, se determinan los siguientes grupos adimensionales del modelo, considerando las condiciones de contorno establecidas en la Tabla 1. De ello resultan

coeficiente de	ecuación	Figura
pérdida, tramo I	$\zeta_I = \xi_I / q_\infty = 2(\tilde{u}_0 - \tilde{u}_{-\infty}) / V_\infty^2 = \frac{3}{4}a^2$	3.1
pérdida total, tramo I+II	$\zeta_{I+II} = \xi_{I+II} / q_\infty = 2(\tilde{u}_{+\infty} - \tilde{u}_{-\infty}) / V_\infty^2 = \zeta_I + \zeta_{II}$	
pérdida, tramo I+II ( $\omega_0 = 0$ )	$\zeta_{I+II1} = \xi_{I+II1} / q_\infty = \zeta_I + \zeta_{II1}$	3.2
pérdida, tramo II ( $\omega_0 = 0$ )	$\zeta_{II1} = \xi_{II1} / q_\infty = a \left\{ \left[ \frac{(a+2)}{(1+a)^2} \right] (1-a)^2 + 2 \left[ \frac{a}{8} - \frac{(1-a)^2}{(1+a)} \right] \right\}$	3.3
pérdida, tramo II, efecto de rotación	$\zeta_{II2} = \xi_{II2} / (q_\infty \sigma_0^2) = 2a^3 / (1+a)$	3.4
pérdida total, tramo II	$\zeta_{II} = 2(\tilde{u}_{+\infty} - \tilde{u}_0) / V_\infty^2 = \zeta_{II1} + \zeta_{II2}$	
tracción	$C_T = T / (q_\infty A) = 4(1-a)a / (1+a)$	4.1
torque, por efecto de la rotación	$C_Q = -Q / (q_\infty AR \sigma_0) = 2(1-a)a$	4.2
potencia	$C_{P1} = P_1 / (q_\infty AV_\infty) = C_T(1-a) = 4(1-a)^2 a / (1+a)$	4.3
potencia, por efecto de la rotación	$C_{P2} = -P_2 / (q_\infty AV_\infty \sigma_0^2) = C_Q \cdot a = 2(1-a)a^2$	4.4
potencia total	$C_P = C_{P1} - C_{P2}$	4.5

Tabla 2. Principales coeficientes característicos de la turbina eólica

donde  $A = \pi R^2$  representa el área del disco,  $q_\infty = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$  es la presión dinámica de la corriente libre,  $\xi$  es la pérdida de presión total,  $T$  es la tracción sobre el disco,  $Q$  es la cupla en el rotor y  $P$  denota la potencia.

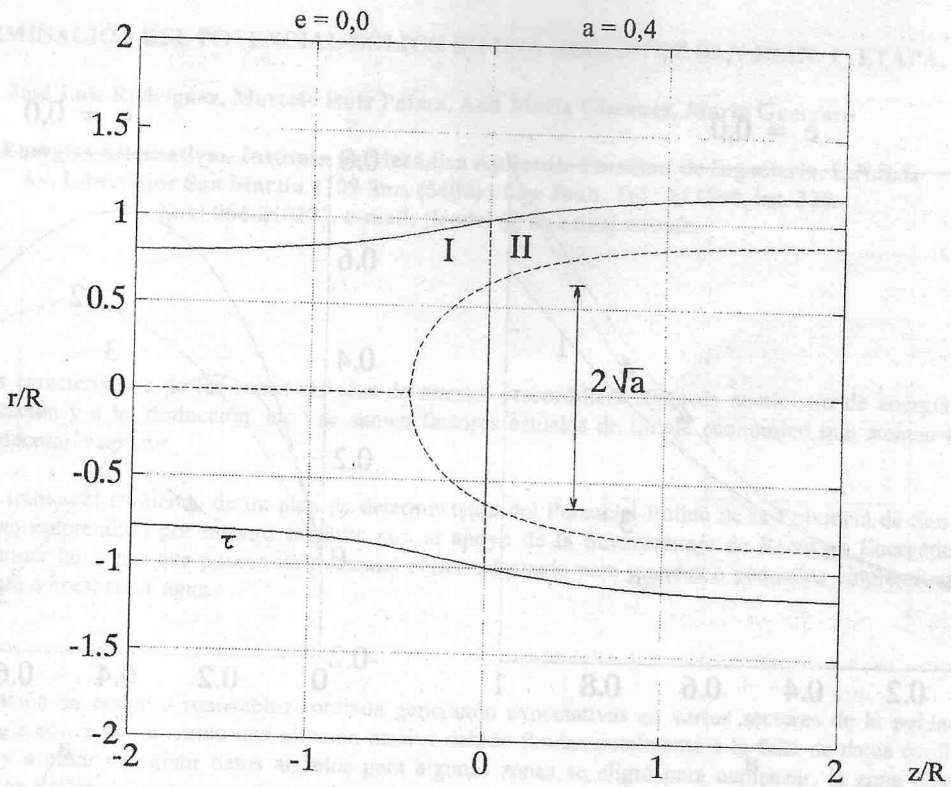


Figura 1. Vista lateral del tubo de corriente y del disco actuador

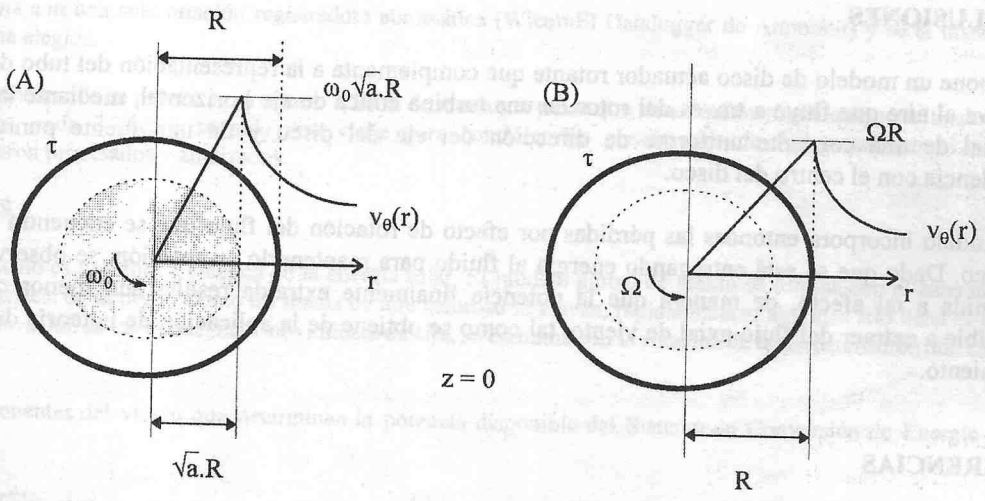


Figura 2. Vista frontal del tubo de corriente y del disco actuador

coordenada axial en el interior de $\tau$	$z = -\infty$	$z = 0 - \epsilon$	$z = 0 + \epsilon$	$z = +\infty$
		dominio I	dominio II	
presión	$p_\infty$	$p_1$	$p_2$	$p_\infty$
velocidad axial	$V_\infty$	$V_\infty(1-a)$	$V_\infty(1-a)$	$V_\infty(1-a)/(1+a)$
velocidad angular	0	0	$\Omega$	$\Omega/(1+a)$
velocidad tangencial	0	0	$\Omega.r$	$\Omega.r/(1+a)$
energía interna	$u_\infty$	$u_0$	$u_0$	$u_\infty$
radio de $\tau$	$\sqrt{(1-a)}.R$	$R$	$R$	$\sqrt{(1+a)}.R$

Tabla 1. Condiciones de contorno sobre las variables del flujo

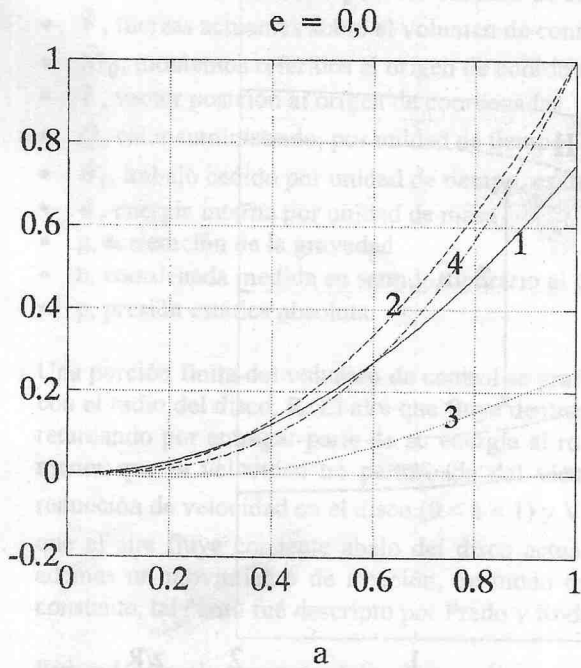


Figura 3. Coeficientes de pérdidas de presión

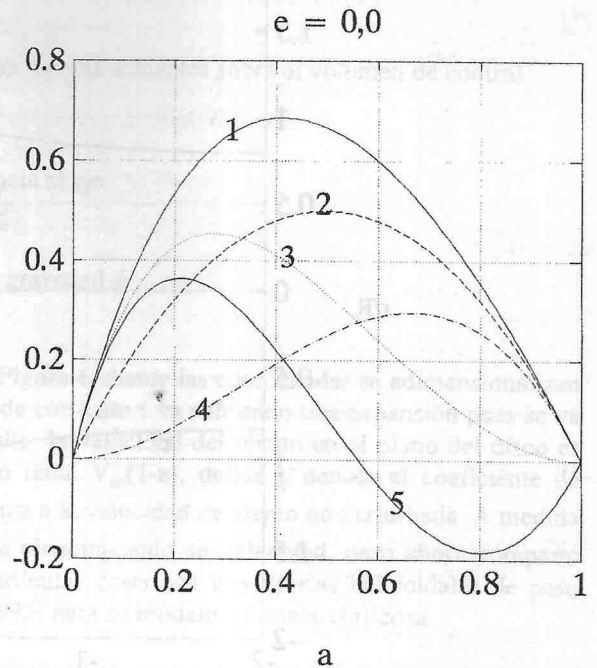


Figura 4. Coeficientes característicos del rotor

## CONCLUSIONES

Se propone un modelo de disco actuador rotante que complementa a la representación del tubo de corriente que envuelve al aire que fluye a través del rotor de una turbina eólica de eje horizontal, mediante la superposición potencial de una corriente uniforme de dirección del eje del disco y de una fuente puntual ubicada en coincidencia con el centro del disco.

Este modelo incorpora entonces las pérdidas por efecto de rotación del flujo que se encuentra corriente abajo del disco. Dado que se está entregando energía al fluido para mantenerlo en rotación, se observa una potencia consumida a tal efecto, de manera que la potencia finalmente extraída resulta aún menor que la potencia disponible a extraer del flujo axial de viento, tal como se obtiene de la aplicación de la teoría de la cantidad de movimiento.

## REFERENCIAS

- Bastianón R.A. *Energía del viento y diseño de turbinas eólicas*. Tiempo de Cultura Ediciones, Buenos Aires (1994).
- Dymont A. A modified form of the Betz' wind turbine theory including losses. *Journal of Fluids Engineering* **111**, 356-358 (1989).
- Eggleston D.M. and Stoddard F.S. *Wind Turbine Engineering Design*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1987).
- Hurt V.D. *Windpower: A Handbook of Wind Energy Conversion Systems*, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1981).
- Le Gourières D. *Energie éolienne*. Deuxième édition, Eyrolles, Paris (1982)
- Prado R.A. Reformulación de la teoría de la cantidad de movimiento aplicada a turbinas eólicas. *Anales del VI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Santiago de Chile*, pp.723-728 (1994).
- Prado R.A. Reformulation of the momentum theory applied to wind turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **58**, 277-292 (1995).
- Prado R.A. y Rodríguez A.S. Modelo de estela vorticiosa fija de un rotor eólico de eje horizontal. *ASADES'95*, San Luis (1995).
- White F.M. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, México (1983).