

VALORES LÍMITES TEÓRICOS DEL FACTOR DE CONCENTRACION  
DE CONCENTRADORES DE RADIACION SOLAR

R.O. Nicolás y J.C. Durán

División Energía Solar  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Avda. del Libertador 8250 - 1429 Buenos Aires

Resumen

En la bibliografía sobre concentradores de radiación solar son de uso generalizado las expresiones del máximo factor de concentración que se puede lograr teóricamente con dichos dispositivos. Denominando  $\beta_0$  al semiángulo de apertura solar, Winston demostró a partir del principio de conservación del volumen en el espacio de las fases que dichas expresiones tienen la forma

$$C_{\max,2} = 1/\sin \beta_0 = 215 \text{ y}$$

$$C_{\max,3} = 1/\sin^2 \beta_0 = 46.165,$$

para concentradores de foco lineal y puntual, respectivamente. Estos valores límites fueron obtenidos bajo ciertas hipótesis acerca de la distribución de intensidades del disco solar y del tamaño de la superficie sobre la que recibe la radiación concentrada. Dichas hipótesis no han sido, en general, claramente especificadas.

En este artículo determinamos, a partir de lo desarrollado por Winston para fuentes Lambertianas, el máximo factor de concentración que puede lograrse con concentradores de dos dimensiones (foco lineal) y de tres dimensiones (foco puntual) para una fuente con cualquier distribución de intensidades. En particular, se calculan los factores de concentración puntual máximos para tres modelos de distribución de intensidades del disco solar.

1. Introducción

Los concentradores de radiación pueden ser utilizados en una gran variedad de aplicaciones de la energía solar. Un parámetro de fundamental importancia de estos sistemas es el factor de concentración ya que, si está apropiadamente definido, resulta ser el único parámetro dependiente de las propiedades

del concentrador necesario para determinar la eficiencia de conversión de energía solar en térmica en el receptor [1].

En este artículo determinamos, a partir de lo desarrollado por Winston [2,3] para fuentes Lambertianas, el máximo factor de concentración que puede lograrse con concentradores de dos dimensiones (cilíndricos) y de tres dimensiones para una fuente con cualquier distribución de intensidades. En particular, se calculan los factores de concentración máximos para diversos modelos de distribución de intensidades del disco solar.

2. Factor de concentración. Definiciones

En [1] hemos diferenciado tres factores de concentración:

- factor de concentración geométrico  $C_A$ : cociente entre el área de apertura  $A_C$  del concentrador y el área del receptor  $A_R$ ;
- factor de concentración puntual  $C(\vec{x})$ : cociente entre la intensidad  $I_r(\vec{x})$  (potencia por unidad de área) incidente en el punto del receptor definido por el vector  $\vec{x}$  y la intensidad  $I_0$  de la radiación solar directa;
- factor de concentración medio  $\bar{C}(A_R)$ : valor medio de  $C(\vec{x})$  sobre el área  $A_R$  del receptor, resulta ser igual al cociente entre la intensidad media en el receptor  $\bar{I}_R$  y la incidente en el concentrador  $I_0$ .

La relación entre  $C_A$  y  $\bar{C}(A_R)$  está dada por

$$\bar{C}(A_R) = \bar{I}_R / I_0 = C_A \eta_0(A_R) \cos i, \quad (1)$$

donde  $\eta_0(A_R)$  es la eficiencia óptica (cociente entre la energía incidente en el receptor y la incidente en el concentrador) e  $i$  es el ángulo que forman los rayos provenientes del centro del Sol con la normal al plano de apertura del concentrador.

De las definiciones precedentes podemos concluir que  $C(\vec{x})$  y  $\bar{C}(A_R)$  son los factores de concentración que tienen significado físico ya que están directamente relacionados con el flujo de energía incidente en el receptor; en

†) Aceptado para su publicación en Journal of the Optical Society of America (1984).

cambio, el  $C_A$  no tiene relevancia por sí solo [1] y, por su definición, no está acotado. Sin embargo, notemos que cuando  $\eta_0(A_r) = 1$  e  $i = 0^\circ$ ,  $\bar{C}(A_r) = C_A$ , por lo que, en dichas condiciones, el valor límite de  $\bar{C}(A_r)$  coincide con el de  $C_A$ .

En adelante, denominaremos  $C_{m2}$  y  $C_{m3}$  a los valores máximos del factor de concentración puntual  $C(\vec{x})$  para dos y tres dimensiones, respectivamente; en consecuencia  $C(\vec{x}) < C_{m2}$ , para dos dimensiones, y  $C(\vec{x}) < C_{m3}$ , para tres dimensiones.

### 3. Valores límites del factor de concentración. Expresiones generales

Winston [2,3] demostró, a partir del principio de conservación del volumen en el espacio de las fases, que toda la radiación incidente sobre una superficie plana de área  $A_C$  con ángulos de incidencia  $\theta$  (medidos con respecto a la normal) menores que  $\theta_a$  ( $\theta \leq \theta_a$ ), puede ser concentrada en un área receptora  $A_r$  tal que

$$A_r \geq A_C \text{ sen } \theta_a, \quad (2)$$

para el caso de dos dimensiones, y

$$A_r \geq A_C \text{ sen}^2 \theta_a, \quad (3)$$

para tres dimensiones.

Si la fuente es Lambertiana de semiancho angular  $\theta_a$ , el flujo de radiación incidente  $\Phi$  sobre el área  $A_C$  (ubicada perpendicular al rayo proveniente del centro de la fuente) por unidad de ángulo sólido y por unidad de área proyectada es uniforme sobre todas las direcciones con ángulo de incidencia menor que  $\theta_a$ . En consecuencia

$$\frac{d\Phi}{d\theta' ds'} = \frac{d\Phi}{d\theta' ds \cos \theta'} = J_2(\theta') = K_2, \quad (4)$$

para dos dimensiones, y

$$\frac{d\Phi}{d\Omega ds'} = \frac{d\Phi}{d\Omega ds \cos \theta} = J_3(\theta, \phi) = K_3, \quad (5)$$

para tres dimensiones ( $d\Omega = d\phi \text{ sen} \theta d\theta$  en coordenadas esféricas). En (4) y (5)  $ds'$  es un elemento diferencial de superficie proyectado según la dirección definida por  $d\Omega$  (o  $d\theta'$ , para dos dimensiones) y  $K_2$  y  $K_3$ , constantes características de las fuentes. Se ha diferenciado el ángulo  $\theta'$  para el caso de dos dimensiones debido a que no coincide con el ángulo  $\theta$  de coordenadas esféricas (esto se verá en detalle en la Sec.4). Integrando sobre todo el ángulo sólido se obtiene una relación entre la intensidad  $I_0$  de la radiación solar directa y las constantes  $K_2$  y  $K_3$ ; esto conduce a

$$I_0 = \int_{-\theta_a}^{\theta_a} K_2 \cos \theta' d\theta' = 2K_2 \text{ sen } \theta_a, \quad (6)$$

para dos dimensiones, y

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_a} d\phi K_3 \cos \theta \text{ sen } \theta d\theta = \pi K_3 \text{ sen}^2 \theta_a, \quad (7)$$

para tres dimensiones. Para una fuente cualquiera, las ecs. (6) y (7) permiten definir valores medios de las densidades de flujo de energía  $J_2(\theta')$  y  $J_3(\theta, \phi)$ :

$$\bar{J}_2 = I_0 / (2 \text{ sen } \theta_a) \text{ y } \bar{J}_3 = I_0 / (\pi \text{ sen}^2 \theta_a) \quad (8)$$

En el caso particular de fuentes Lambertianas,  $\bar{J}_2 = K_2$  y  $\bar{J}_3 = K_3$ .

Consideramos ahora los dispositivos (concentradores) denominados ideales que son los que satisfacen la igualdad en (2) o en (3) (según que sean de dos o de tres dimensiones) sobre los que incide radiación proveniente de una fuente Lambertiana de semiancho angular  $\theta_a$  (con  $i = 0^\circ$ ). Winston mostró que en estos casos el flujo de radiación incidente por unidad de área  $I_r(\vec{x})$  sobre el receptor resulta uniforme sobre todo  $A_r$ , es decir,  $I_r(\vec{x}) = \bar{I}_r = I_r$  para todo vector  $\vec{x}$  que defina un punto del receptor. Teniendo en cuenta, además, que estamos considerando los dispositivos en los que toda la radiación incidente sobre  $A_C$  es concentrada en el área  $A_r$  (o sea,  $\eta_0(A_r) = 1$ ), de (1), (6) y (7) resulta:

$$I_r = 2K_2 = 2\bar{J}_2, \quad (9)$$

para dos dimensiones, e

$$I_r = \pi K_3 = \pi \bar{J}_3, \quad (10)$$

para tres dimensiones. Observamos que estos resultados son válidos para fuentes Lambertianas con cualquier valor de  $\theta_a$ . Si consideramos una fuente no Lambertiana  $J_2(\theta') \neq \text{const.}$  ( $J_3(\theta, \phi) \neq \text{const.}$ ) es posible subdividirla en intervalos angulares infinitesimales  $\delta\theta'$  ( $\delta\Omega$ ) de manera tal que cada uno de ellos represente una fuente Lambertiana. Las ecs. (9) y (10) nos permiten calcular la intensidad  $I_{rn}$  (n identifica la fuente) en el receptor de concentradores ideales con ángulo de aceptación  $\delta\theta_a$  (que coincide con la semiapertura angular definida por  $\delta\theta'$  y  $\delta\Omega$ ) orientados hacia cada una de dichas fuentes infinitesimales. En estas condiciones resulta evidente que el máximo valor de  $I_{rn}$  se obtiene considerando la fuente

infinitesimal correspondiente al máximo de  $J_2(\theta')$  o  $J_3(\theta, \phi)$ , según el caso. Denominamos  $J_{M_2}$  y  $J_{M_3}$ , respectivamente, a dichos máximos, resulta

$$I_{r_{M_2}} = 2J_{M_2}, \quad (11)$$

para dos dimensiones, e

$$I_{r_{M_3}} = \pi J_{M_3}, \quad (12)$$

para tres dimensiones.

Para probar que estos valores corresponden a los valores máximos posibles de  $I_r(\vec{x})$ , falta demostrar que ellos no pueden ser superados utilizando ángulos de aceptación no infinitesimales. Para ello, consideremos una porción de la fuente de ancho angular  $\theta_b$  y un concentrador ideal con igual ángulo de aceptación y orientado hacia ella. Si dicha porción de la fuente fuera Lambertiana de intensidad uniforme  $J_{M_2}$  o  $J_{M_3}$ , la intensidad en el receptor sería uniforme e igual a  $2J_{M_2}$  o  $\pi J_{M_3}$ , respectivamente. Dado que para la fuente real, en general no uniforme, se verifica que  $J_2(\theta') \leq J_{M_2}$  o  $J_3(\theta, \phi) \leq J_{M_3}$ , resulta que para todo  $\vec{x}$  del receptor

$$I_r(\vec{x}) \leq 2J_{M_2}, \quad (13)$$

para dos dimensiones, e

$$I_r(\vec{x}) \leq \pi J_{M_3}, \quad (14)$$

para tres dimensiones. Finalmente, dividiendo por  $I_0$  se obtiene el factor de concentración máximo:

$$C(\vec{x}) \leq C_{m_2} = \frac{2J_{M_2}}{I_0} = \frac{2J_{M_2}}{2J_2 \sin \theta_a} = \frac{1}{\sin \theta_a} \frac{J_{M_2}}{J_2}, \quad (15)$$

para dos dimensiones, y

$$C(\vec{x}) \leq C_{m_3} = \frac{\pi J_{M_3}}{I_0} = \frac{\pi J_{M_3}}{\pi J_3 \sin^2 \theta_a} = \frac{1}{\sin^2 \theta_a} \frac{J_{M_3}}{J_3}, \quad (16)$$

para tres dimensiones.

De (15) y (16) se observa que los valores máximos del factor de concentración son proporcionales a los máximos de la distribución de intensidades por unidad de ángulo sólido de la fuente.

Para hallar las relaciones  $J_{M_2}/\bar{J}_2$  y  $J_{M_3}/\bar{J}_3$  definimos previamente  $J_{2N}(\theta')$  y  $J_{3N}(\theta, \phi)$ :

$$J_{2N}(\theta') = \frac{J_2(\theta')}{J_{M_2}} \quad \text{y} \quad J_{3N}(\theta, \phi) = \frac{J_3(\theta, \phi)}{J_{M_3}}. \quad (17)$$

Dado que, para dos dimensiones, se verifica que

$$I_0 = 2 \sin \theta_a \bar{J}_2 = \int_{-\theta_a}^{\theta_a} J_{M_2} J_{2N}(\theta') \cos \theta' d\theta', \quad (18)$$

resulta

$$\frac{J_{M_2}}{\bar{J}_2} = \frac{2 \sin \theta_a}{\int_{-\theta_a}^{\theta_a} J_{2N}(\theta') \cos \theta' d\theta'}. \quad (19)$$

En forma similar, para tres dimensiones, se llega a

$$\frac{J_{M_3}}{\bar{J}_3} = \frac{\pi \sin^2 \theta_a}{\int_0^{\theta_a} \int_0^{\phi} J_{3N}(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}. \quad (20)$$

Las ecuaciones (15), (16), (19) y (20) permiten determinar los valores límites del factor de concentración puntual  $C(\vec{x})$  y, por lo tanto, del factor de concentración medio  $\bar{C}(A_r)$  para cualquier distribución de intensidades de la fuente. Conviene destacar que las relaciones  $J_{M_2}/\bar{J}_2$  y  $J_{M_3}/\bar{J}_3$  y, en consecuencia, los factores de concentración asociados, sólo dependen de la forma de la distribución de intensidades pero no de sus valores absolutos.

#### 4. Valores límites para distintos modelos del disco solar.

El disco solar es una fuente de semiapertura angular  $\theta_a = \theta_s = 16'$ . Si  $J_3(\theta, \phi)$  es su distribución de intensidades, la expresión de  $J_2(\theta')$  correspondiente al caso bidimensional resulta de

$$J_2(\theta') = \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_3(\theta', \gamma) \cos^2 \gamma d\gamma = J_{M_3} \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_{3N}(\theta', \gamma) \cos^2 \gamma d\gamma, \quad (21)$$

donde  $\gamma_1 = \arccos(\cos \theta_a / \cos \theta')$ .  $J_{3N}(\theta', \gamma)$  se obtiene de  $J_{3N}(\theta, \phi)$  mediante el siguiente

cambio de variables (ver Fig.1)

$$\theta = \arccos(\cos \gamma \cos \theta') \text{ y}$$

$$\phi = \arctg(\tg \gamma \sen \theta').$$

Una vez calculado  $J_2(\theta')$  se puede obtener la relación  $J_{M_2}/\bar{J}_2$  utilizando (19). Si se conoce el valor de  $\theta' = \theta_m$  para el cual  $J_2(\theta')$  toma su valor máximo también es posible calcular  $J_{M_2}/\bar{J}_2$  de

$$\frac{J_{M_2}}{\bar{J}_2} = \frac{2 \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_{3N}(\theta_m, \gamma) \cos^2 \gamma \, d\gamma}{\pi \sen \theta_s} \frac{J_{M_3}}{\bar{J}_3}, \quad (22)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $2\bar{J}_2 \sen \theta_s = \pi \bar{J}_3 \sen^2 \theta_s = I_0$ .

De lo anterior podemos concluir que a un modelo dado de distribución de intensidades en tres dimensiones le corresponde un modelo bi dimensional dado por (21).

A continuación hallaremos los valores límites para los tres modelos de distribución de intensidades del disco solar más utilizados en la bibliografía (ej. [4-8]).

1) Disco solar con distribución de intensidades uniforme en el caso tridimensional es decir

$$J_3(\theta, \phi) = K_3 = \bar{J}_3 = \text{const.} \quad (23)$$

i) Caso tridimensional

Dado que  $J_{M_3} = \bar{J}_3$ , resulta

$$C_{m_3} = \frac{1}{\sen^2 \theta_s} = 46165. \quad (24)$$

ii) Caso bidimensional

Teniendo en cuenta que  $J_{3N}(\theta', \gamma) = 1$  resulta

$$\int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_{3N}(\theta'; \gamma) \cos^2 \gamma \, d\gamma = \left[ 1 - \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos^2 \theta'} \right]^{1/2} \frac{\cos \theta_s}{\cos \theta'} + \arccos \left[ \frac{\cos \theta_s}{\cos \theta'} \right]. \quad (25)$$

Dado que el máximo de esta integral (que coincide con el máximo de  $J_2(\theta')$ ) se obtiene para  $\theta' = \theta_m = 0$ , de (22) resulta

$$\begin{aligned} \frac{J_{M_2}}{\bar{J}_2} &= \frac{2 \left[ \frac{\sen^2 2\theta_s}{2} + \theta_s \right]}{\pi \sen \theta_s} \\ &\approx \frac{4\theta_s}{\pi \sen \theta_s} \approx \frac{4}{\pi}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\theta_s \ll 1$ .

Finalmente, reemplazando (26) en (15), se obtiene

$$C_{m_2} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sen \theta_s} \approx 274. \quad (27)$$

2) Disco solar con distribución de intensidades dada por Jose [8]

$$\begin{aligned} J_3(\theta, \phi) &= J_{M_3} \{ 1 + 1,5641 \\ &\times [1 - (\tg \theta / \tg \theta_s)^2]^{1/2} \} / 2,5641 \\ &\approx J_{M_3} \{ 1 + 1,5641 \\ &\times [1 - (\gamma^2 + \theta'^2) / \theta_s^2]^{1/2} \} / 2,5641, \end{aligned} \quad (28)$$

donde se ha aproximado  $\tg \theta = \theta$  y  $\theta^2 = \gamma^2 + \theta'^2$ , teniendo en cuenta que  $\theta \leq \theta_s \ll 1$ .

i) Caso tridimensional

De (20) resulta

$$\frac{J_{M_3}}{\bar{J}_3} = 1,255 \text{ y } C_{m_3} = 57940. \quad (29)$$

ii) Caso bidimensional

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} J_{3N}(\theta', \gamma) \cos^2 \gamma \, d\gamma \\ &= 0,78(\theta_s^2 - \theta'^2)^{1/2} + 0,96(\theta_s^2 - \theta'^2) / \theta_s, \end{aligned} \quad (30)$$

y que nuevamente el máximo se obtiene para  $\theta' = \theta_m = 0$ , de (22) y (15) resulta

$$\frac{J_{M_2}}{\bar{J}_2} = 1,389 \text{ y } C_{m_2} \approx 299. \quad (31)$$

3) Disco solar con distribución de intensidades uniforme en el caso bidimensional

$$J_2(\theta') = K_2 = \bar{J}_2 = \text{const.} \quad (32)$$

Este modelo es muy poco realista y puede conducir en muchos casos a conclusiones erróneas. De todas maneras, lo analizamos debido a que es utilizado en la bibliografía [6,7].

i) Caso bidimensional

Dado que  $\bar{J}_2 = J_{M_2}$ , resulta

$$C_{m_2} = \frac{1}{\text{sen } \theta_s} = 215 \quad (33)$$

ii) Caso tridimensional

En este caso, no podemos determinar unívocamente una distribución  $J_3(\theta', \gamma)$  que corresponda al modelo bidimensional considerado. Sin embargo, es posible ver que, si consideramos al disco solar como un cuadrado de lado  $2\theta_s$  con distribución uniforme se llega a una distribución en 2 dimensiones uniforme. En este caso consideramos

$$J_3(\theta', \gamma) = J_{M_3} = K$$

para  $|\theta'| \leq \theta_s$  y  $|\gamma| \leq \theta_s$ , por lo que

$$I_0 = J_{M_3} \int_{-\theta_s}^{\theta_s} d\theta' \int_{-\theta_s}^{\theta_s} \cos \gamma d\gamma$$

$$= J_{M_3} 2\theta_s \left[ \theta_s + \frac{\text{sen } 2\theta_s}{2} \right] \approx 4\theta_s^2 J_{M_3}, \quad (34)$$

comparando con (20) llegamos a

$$\frac{J_{M_3}}{J_3} = \frac{\pi}{4} \text{ y } C_{m_3} \approx 36260. \quad (35)$$

Con respecto a este resultado cabe destacar que  $\bar{J}_3$  según (8) corresponde al valor medio de la intensidad de una fuente de semiabertura angular  $\theta_a$  (no de la fuente cuadrada). En consecuencia, en este caso resulta  $\bar{J}_3$  (de la fuente circular) mayor que  $J_{M_3}$  debido a que el ángulo sólido subtendido por la fuente cuadrada es mayor.

Por último, si queremos obtener los valores límites para el factor de concentración medio  $\bar{C}(A_r)$  con la condición de que toda la radiación incidente en el concentrador incida en el receptor ( $\eta_0 = 1$ ) e  $i = 0^\circ$  se obtiene, aplicando directamente lo realizado por Winston,

$$\bar{C}(A_r) = \frac{1}{\text{sen } \theta_s} \approx 215, \text{ para dos dimensiones, y} \quad (36)$$

$$\bar{C}(A_r) = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_s} \approx 46165 \text{ para tres dimensiones,} \quad (37)$$

que son independientes del modelo de distribución que se considere para el disco solar.

5. Conclusiones

Los valores dados en (36) y (37), que también fueron hallados a partir de la 2da ley de la termodinámica [9,10], son los que generalmente se han utilizado [10,12] como valores límites del factor de concentración. En general, no se ha aclarado suficientemente a qué factor de concentración ni a qué modelo del disco solar corresponden. Por lo visto anteriormente, dichos valores son los límites para:

i) factor de concentración medio  $\bar{C}(A_r)$  con

$$\eta_0 = 1 \text{ e } i = 0^\circ;$$

ii) factor de concentración puntual  $C(\bar{x})$  para distribución de intensidades uniforme en dos y tres dimensiones, respectivamente.

Los valores límites de  $C(\bar{x})$  para los otros modelos considerados difieren de los anteriores en no menos del 20% (ver tabla).

Agradecimientos

Agradecemos al Dr. J.A. Moragues el haber hecho posible este trabajo, a través de su continuo apoyo y aliento, como también el haber leído el manuscrito con fructífero espíritu crítico, lo que indudablemente contribuyó a mejorar y clarificar su contenido.

Referencias

- 1) R.O. Nicolás y J.C. Durán, Generalization of the two-dimensional optical analysis of cylindrical concentrators, Solar Energy 25, 21 (1980).
- 2) R. Winston, Light collection within the framework of geometric optics, J. Opt. Soc. Am. 60, 245 (1970).
- 3) R. Winston y W.T. Welford, The optics of non-imaging concentrators, Academic Press, 1978.
- 4) N. Hunko y H. Mu, Design problems of a solar furnace, Solar Energy 1, 108 (1957).
- 5) G.Y. Umarov, R.A. Zakhidov y A.S. Khodzhaev, Radiant-vector distribution in the radiant field of a parabolocylindric concentrator, Appl. Solar Energy 12, 22 (1976).
- 6) K. Hassan y M.F. El-Refaeie, Theoretical performance of cylindrical parabolic solar concentrators, Solar Energy 15, 219 (1973).
- 7) D.L. Evans, On the performance of cylindrical parabolic solar concentrators with flat absorbers, Solar Energy 19, 379 (1976).

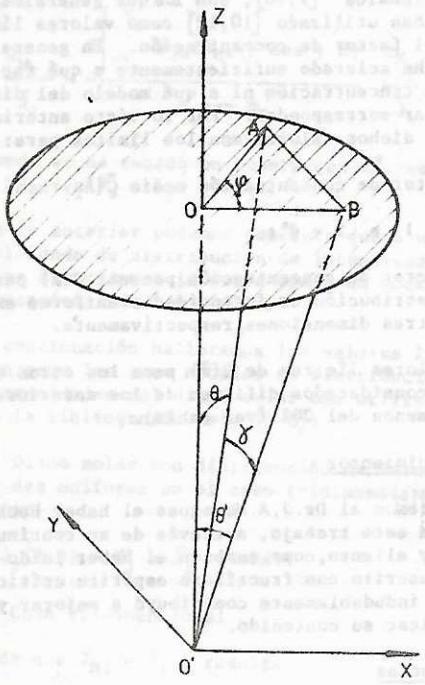
- 8) P.D.Jose, The flux through the focal spot of a solar furnace, Solar Energy 1, 19 (1957).
- 9) R.E.Jones Jr., Collection properties of generalized light concentrators, J.Opt. Soc.Am. 67, 1594 (1977).
- 10) A.Rabl, Comparison of solar concentrators, Solar Energy 18, 93 (1976).
- 11) J.F.Kreider, Medium and high temperature solar processes, Academic Press, 1979.

TABLA

Valores máximos del factor de concentración puntual

Modelo de distribución de intensidades del disco solar

	Sugerido por Jose [8]	Uniforme	Uniforme para el caso bidimensional
$C_{m3}$	57940	46165	36260
$C_{m2}$	299	274	215



**Figura 1:** El disco es paralelo al plano xy y contiene el triángulo OBA. Para una distancia dada  $OO'$ , el punto A queda definido por las coordenadas  $\theta, \phi$  o por las coordenadas  $\theta', \gamma$ . Se puede ver que:  $\widehat{OO'A} = \theta$ ,  $\widehat{AOB} = \phi$ ,  $\widehat{OO'B} = \theta'$  y  $\widehat{AO'B} = \gamma$ . El segmento OB es paralelo al eje x mientras que el AB es paralelo al eje y; en consecuencia, OB es perpendicular a AB.