

ACUMULACION POR CAMBIO DE FASE DE ENERGIA TERMICA DE ORIGEN SOLAR.
CONDUCCION DEL CALOR EN ELEMENTOS DE CAMBIO DE FASE DE VARIAS GEO-
METRIAS.

José Ignacio Castro

Dto. Cs. Exactas, Fac. Filosofía, U. N. San Juan

Maria Leticia Rovetta

Luis Roberto Saravia

Gpo. Energía Solar, Dto. Cs. Exactas, U. N. Salta

Resumen

Se resuelve la ecuación del calor $\partial T / \partial t = \alpha \Delta T$ en la porción sólida de un material inicialmente fundido, durante la etapa de extracción de calor. El método usado, debido a Megerlin, es aplicado a geometrías plana, cilíndrica y esférica bajo dos tipos de transferencia de calor: constante y convectiva. Se analizan hipótesis y se indica el procedimiento a seguir en la etapa acumulativa. Se obtienen: la velocidad de avance y la posición de la superficie de interfase sólido-líquido en función del tiempo, los campos de temperatura dentro de la fase sólida, las temperaturas de extracción del calor, los flujos de calor en transferencia convectiva y los tiempos para congelamiento total. Se analizan resultados analíticos y numéricos. Se dan fórmulas aproximadas y estimaciones de los errores cometidos.

SOLAR THERMAL ENERGY STORAGE BY PHASE CHANGE. HEAT CONDUCTION IN
PHASE CHANGE ELEMENTS OF VARIOUS GEOMETRIES.

Abstract

The heat conduction equation $\partial T / \partial t = \alpha \Delta T$ for the solid portion of an initially melted material is solved, during the heat extraction step. Megerlin's method is applied to plane, cylindrical and spherical geometries, under two heat transference conditions: constant and convective. The hypotheses are analyzed and the procedure for the accumulative step is pointed out. The velocity and position of the solid-liquid interphase surface as a function of time, the temperature field in the solid phase, the heat extraction temperature, the heat flux under convective transference and the time for total freezing are obtained. The analytical and numerical results are analyzed. Approximated formulae and estimations for the errors introduced are obtained.

1- Introducción:

Uno de los problemas fundamentales a resolverse en el campo del aprovechamiento de la Energía Solar es el de la acumulación de energía térmica (calor) durante los períodos de alta irradiación, para ser entregada al usuario durante los períodos de baja irradiación. En la actualidad se contemplan dos posibilidades distintas para la acumulación de esta energía: como calor sensible (caso de los acumuladores de lecho sólido poroso, o de las pozas solares), o bien como calor latente (caso de los acumuladores con elementos que cambian de fase), como se indica en [1]. En ambos casos la acumulación y extracción de calor se realiza por medio de un fluido (que en general no forma parte del sistema acumulador, salvo casos especiales como el de las mencionadas pozas solares).

Parte fundamental de un acumulador por cambio de fase son los elementos de cambio de fase que lo componen (ecf). De sus formas, tamaños, empaquetamiento y material de cambio de fase contenido (mcf), dependerá el rendimiento y la respuesta del acumulador ante sollicitaciones térmicas exteriores [2]. El empaquetamiento y la forma de los ecf, junto con las condiciones del fluido intercambiador de calor fijan el coeficiente h de transferencia convectiva en el acumulador (que supondremos constante en el rango de temperaturas de interés), el cual ha de ser un parámetro de valor conocido en este trabajo. Nuestro propósito es estudiar el proceso de extracción de calor en uno de los ecf, en los casos en que toma forma de paralelepípedo chato (una arista mucho menor que las otras dos), cilindro alargado (radio mucho menor que el largo) o esfera, según se indica en la fig-1.

El presente trabajo completa el de Shamsundar y Sparrow [3], lo extiende a otras geometrías, extrae nuevos resultados no contemplados por los mencionados autores y los aplica a problemas de Energía Solar con transferencias convectivas de bajo salto de temperatura (caso en que se calienta agua o aire con colectores planos).

2- Consideraciones físicas del problema:

Durante la etapa de extracción de calor, el mcf contenido en un ecf solidifica desde la superficie hacia el interior, cediendo energía al exterior por intermedio de un fluido. Esta etapa es crítica para el buen funcionamiento de un acumulador pues el mcf que solidifica desempeña el papel de fuente calórica para el sistema exterior. Si existe una caída sustancial de temperatura a través de la capa solidificada, hay un correspondiente decrecimiento en la tempe-

ratura a la cual la energía es aprovechable[3], con lo cual la eficiencia termodinámica de eventuales sistemas de potencia alimentados por el acumulador disminuye, o, en caso de ser usado para acondicionamiento ambiental, la temperatura de la vivienda disminuye por debajo de los límites de confort, con los evidentes inconvenientes de ambas situaciones. Con el objeto de diseñar acumuladores eficientes y estables, resulta entonces de interés encontrar el campo de temperaturas $T = T(\vec{r}, t)$ para todo punto \vec{r} al tiempo t en el interior del ecf, la temperatura $T_w = T_w(t)$ a que se extrae el calor en su superficie exterior, el flujo de calor ($\text{cal}/\text{cm}^2 \text{ s}$) $j = j(t)$ en dicha superficie, la relación de masas en distinta fase para todo instante y toda otra información térmica pertinente. Tal el objeto de este trabajo.

Se contemplan, para cada geometría de las ya indicadas, dos mecanismos de transferencia de calor en la superficie del ecf:

- a) transferencia con flujo de calor constante j_0
- b) transferencia convectiva con coeficiente constante h .

El segundo de ellos se reduce al primero cuando la diferencia entre la temperatura T_c de cambio de fase y la temperatura T_∞ del fluido intercambiador es muy grande ($T_c \gg T_\infty$), o bien si la conductividad k , el calor latente λ y el calor específico c del mcf en fase sólida se hacen suficientemente grande, grande y chico respectivamente ($k, \lambda \rightarrow \infty$; $c \rightarrow 0$), o bien si el volumen del ecf se reduce suficientemente ($R \rightarrow 0$), o bien si se dan cualesquiera de estas circunstancias combinadas. Desde el punto de vista formal, esto implica cierta condición sobre los parámetros adimensionales del problema, que veremos más adelante. En el uso de acumuladores como foco caliente para sistemas de potencia es conveniente que el mcf posea temperatura T_c elevada, siendo aptos para este fin metales como el estaño o sales iónicas como el fluoruro de litio[3]; en estos casos, el mecanismo a), favorecido por una alta conductividad calórica y bajo calor específico, es el más apropiado para describir el problema. En uso para aclimatación de viviendas, es casi obligatorio el modelo b), pues conviene que el mcf posea temperatura T_c no superior a 60°C , como en el caso de las parafinas o los cristales de sales hidratadas, cuya conductividad es baja y cuyo calor específico es alto[1].

Con el objeto de simplificar el problema, las geometrías de la fig-1 se idealizan: se supone que el mcf está ubicado entre dos superficies planas paralelas de extensión infinita, o bien dentro de un cilindro de longitud infinita, o bien dentro de una esfera; en cualquier caso, la extracción de calor se produce en las superficies que limitan el ecf. A cada geometría se asigna un índice n

cuyo valor se indica en la figura. Se dibujan allí, además del sistema de ejes ortogonales de referencia elegido, las coordenadas a usarse en la solución para cada geometría (cartesianas para $n = 0$, cilíndricas para $n = 1$, esféricas para $n = 2$).

Se toma como condición inicial, a $t = 0$, el ecf completamente lleno por mcf en fase líquida a temperatura T_c . En cualquier tiempo $t > 0$ existen tanto fase líquida (L) como sólida (S). Se supondrá que el contorno de separación de ambas fases posee la misma geometría que el ecf correspondiente (ver la fig-2) y que las densidades de las fases S y L son idénticas ($\rho_s = \rho_l = \rho$). La primera hipótesis es admisible en virtud de la simetría del problema y de un mecanismo de autorregulación: si la capa sólida adelgaza en cierto punto respecto de los demás, el incremento en el gradiente de temperatura que correspondientemente se produce en ese punto aumenta allí el flujo térmico y tiende a restablecer el espesor uniforme en la capa. La segunda hipótesis, difícil de observarse en la práctica, es condición casi necesaria para la primera ya que eventuales fenómenos de flotación o precipitación de fase S en la fase L pueden modificar las condiciones geométricas, por una parte; por otra parte, evita tomar en cuenta efectos tales como dilatación, posible aparición de una tercera fase de vapor en el sistema o formación de cavidades en la fase S.

En la fig-2 se da la nomenclatura a usar en el trabajo y la dependencia de los campos de temperaturas con las variables espaciales, teniendo en cuenta las simetrías implicadas y los sistemas de coordenadas elegidos. La ecuación del calor toma para cada caso ($n = 0,1,2$) la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{en } (r^* \leq r \leq R) \quad (1)$$

donde $\alpha = k/c\rho$, el asterisco se usa para identificar las coordenadas de la superficie de separación de fases y r corresponde para cada valor de n a una coordenada de tipo distinto, según se dijo. Para el caso $n = 0$, se puede estudiar sólo la solución para $r > 0$ pues por razones de simetría $T(-r,t) = T(r,t)$.

Las condiciones de contorno son, para $n = 0,1,2$ indistintamente

$$\text{en } r = r^* \begin{cases} T = T_c & (2) \\ k \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \rho \dot{r}^* & (3) \end{cases}$$

donde $\dot{r}^* = dr^*/dt$ y

$$\text{en } r = R \left\{ k \frac{\partial T}{\partial r} = -j_0 \text{ o bien } k \frac{\partial T}{\partial r} = -h(T_W - T_\infty) \right. \quad (4a,b)$$

según se trate del caso de transferencia de calor a) constante o b) convectiva.

Antes de resolver los campos de temperaturas, conviene mencionar que el estudio de la licuación del mcf durante el período de acumulación es del todo análogo al presente si se supone que el mecanismo de transmisión del calor en la fase líquida es únicamente la conducción; en el caso de considerarse la convección del líquido el problema cambia radicalmente. En la generalidad de los casos la licuación se produce más rápidamente que la solidificación.

3- Análisis y solución de las ecuaciones:

Introduciremos ahora variables adimensionales, indicando con a o b las que correspondan a los mecanismos de transferencia de calor constante o convectiva:

$$\theta_a = \frac{k(T_c - T)}{j_0 R}, \quad \theta_b = \frac{T_c - T}{T_c - T_\infty} \quad (5a,b)$$

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad \eta^* = \frac{r^*}{R}, \quad F_0 = \frac{\alpha t}{R^2} \quad (6)$$

y definiremos los números adimensionales de Stefan

$$S_a = \frac{c j_0 R}{k \lambda}, \quad S_b = \frac{c(T_c - T_\infty)}{\lambda} \quad (7a,b)$$

y de Biot

$$B = \frac{hR}{k} \quad (8)$$

Con estas variables y parámetros adimensionales (1) se puede escribir (para los casos a o b indistintamente)

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{1}{\eta^n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad \text{en } (\eta^* \leq \eta \leq 1) \quad (9).$$

Atacando el problema matemático de un modo más general, buscaremos la solución de (9) para cualquier valor del índice n , por un método aproximado. Las condiciones de borde para (9) son

$$\text{en } \eta = \eta^* \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\frac{j^*}{S} \end{cases} \quad \begin{matrix} (10) \\ (11) \end{matrix}$$

$$\text{en } \eta = 1 \quad \begin{cases} a) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 1 \quad \text{o bien} \\ b) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = B[1 - \theta_w] \end{cases} \quad (12a, b)$$

donde θ_w corresponde a θ_b para $T = T_w$ (o sea, $\eta = 1$).

Definimos la variable $\xi = \xi(\eta, \eta^*[F_0])$ por la integral

$$\xi = \int_{\eta^*}^{\eta} x^{-n} dx = \begin{cases} \ln(\eta/\eta^*) & (n=1) \\ \frac{1}{n-1} [\eta^{*(1-n)} - \eta^{(1-n)}] & (n \neq 1) \end{cases} \quad (13).$$

ξ es la solución de la ecuación $\frac{1}{\eta^n} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^n \frac{\partial \xi}{\partial \eta}) = 0$, que para $n = 0, 1, 2$ es la ecuación de Laplace para todo el espacio, con fuente de campo plana, lineal y puntual respectivamente, y tiene por punto de referencia a η^* pues $\xi(\eta^*, \eta^*) = 0$. Usando (13) se puede expresar (9) como

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{1}{\eta^{2n}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\eta^*}{\eta^{*n}} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (14),$$

donde $\eta = \eta(\xi, F_0)$, $\eta^* = \eta^*(F_0)$ y se usa θ para indicar la dependencia explícita de θ con ξ y F_0 : $\theta = \theta(\xi, F_0) \equiv \theta(\eta[\xi, F_0], F_0)$.

Propondremos como solución de (14) el desarrollo en serie de potencias

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(F_0) \xi^i \quad (15);$$

Las condiciones de borde (10) y (11) se escriben ahora

$$\text{en } \xi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = - \frac{\eta^{*n} \dot{\eta}^*}{S} \end{array} \right. ,$$

y aplicadas a (15) permiten obtener C_0 y C_1 :

$$C_0 = 0 \quad , \quad C_1 = - \frac{\eta^{*n} \dot{\eta}^*}{S} \quad (16).$$

Reemplazando (15) en (14) se tiene

$$\sum_i \dot{C}_i \xi^i = \frac{1}{\eta^{*2n}} \sum_i C_i i(i-1) \xi^{i-2} + \frac{\dot{\eta}^*}{\eta^{*n}} \sum_i C_i i \xi^{i-1} \quad (17).$$

Las sumas se extienden entre 0 e ∞ salvo indicación en contrario. Por otra parte, según (13)

$$\frac{1}{\eta^{*2n}} = \begin{cases} \frac{e^{-2\xi}}{\eta^{*2}} & (n=1) \\ [\eta^{*(1-n)} - (n-1)\xi]^{-\frac{2n}{n-1}} & (n \neq 1) \end{cases} \quad (18),$$

expresiones que admiten el desarrollo en serie (polinomio si $n = -1, 0, 2$ ó 3)

$$\frac{1}{\eta^{*2n}} = \sum_i A_i (F_0) \xi^i$$

salvo en los casos $0 < n < 1$ (que no trataremos aquí). Los coeficientes A_i son:

$$A_i = \begin{cases} \frac{(-2)^i}{i! \eta^{*2}} & (n=1) \\ \frac{(1-n)^i}{i!} \frac{\gamma'(\frac{2n}{n-1} + 1)}{\gamma'(\frac{2n}{n-1} + 1 - i)} \frac{1}{\eta^{*n(2-i)+i}} & (n \neq 1) \end{cases} \quad (19),$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^{*2n}} \sum_i C_i i(i-1) \xi^{i-2} &= \sum_{j,i} A_j C_i i(i-1) \xi^{i+j-2} = \sum_{h,i} A_{h-i+2} C_i i(i-1) \xi^h = \\ &= \sum_{i,j} A_{i-j+2} C_j j(j-1) \xi^i \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del índice $h = i + j - 2$ y de la propiedad de índices mudos de h e i . Con esto, (17) se escribe

$$\sum_i \dot{c}_i \xi^i = \sum_i \left(\sum_j j(j-1) C_j A_{i-j+2} \right) \xi^i + \sum_i \frac{\dot{\eta}^*}{\eta^{*n}} C_{i+1} (i+1) \xi^i$$

y resulta la relación de recurrencia

$$\dot{c}_i = \sum_{j=2}^{i+2} j(j-1) C_j A_{i-j+2} + \frac{\dot{\eta}^*}{\eta^{*n}} (i+1) C_{i+1},$$

de donde

$$C_{i+2} = \frac{\eta^{*2n}}{(i+2)(i+1)} \left[\dot{c}_i - \frac{\dot{\eta}^*}{\eta^{*n}} (i+1) C_{i+1} - \sum_{j=2}^{i+1} j(j-1) C_j A_{i-j+2} \right] \quad (20)$$

pues por (19) $A_0 = 1/\eta^{*2n}$. Usando (16), para $i = 0$ se obtiene

$$C_2 = \frac{(\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^2}{2S}$$

Para $i = 1$ es

$$C_3 = -\frac{(\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^3}{6S} \left[1 + \frac{\ddot{\eta}^*}{\dot{\eta}^{*3}} - \frac{n}{\dot{\eta}^* \eta^*} \right] \quad (21).$$

De esta manera resulta para los casos a) o b) indistintamente

$$S\theta(\eta, F_0) = -(\eta^{*n} \dot{\eta}^*) \xi(\eta, \eta^*) + \frac{1}{2} (\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^2 \xi^2(\eta, \eta^*) - \dots \quad (22)$$

donde $\eta^* = \eta^*(F_0)$. Es notable el hecho de que se puede expresar

$$\begin{aligned} S\theta &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^i \xi^i(\eta, \eta^*) + O(\eta^*, \dot{\eta}^*, \ddot{\eta}^*, \dots) = \\ &= \exp[-\eta^{*n} \dot{\eta}^* \xi(\eta, \eta^*)] - 1 + O(\eta^*, \dot{\eta}^*, \ddot{\eta}^*, \dots) \end{aligned}$$

que conduce, en caso de ser el término $O(\eta^*, \dot{\eta}^*, \ddot{\eta}^*, \dots)$ despreciable, a la fórmula (que satisface (10) y (11))

$$S\theta \approx \exp[-\eta^{*n} \dot{\eta}^* \xi(\eta, \eta^*)] - 1 \quad (23);$$

esta expresión será utilizada más adelante, por su sencillez, para aproximar los resultados buscados. Apliquemos ahora la condición (12a,b) a (22); resulta

$$S_a = -(\eta^{*n} \dot{\eta}^*) + (\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^2 \mathcal{F}(1, \eta^*) - \dots \quad (24a)$$

$$S_b B \left\{ 1 - \frac{1}{S_b} \left[-(\eta^{*n} \dot{\eta}^*) \mathcal{F}(1, \eta^*) + \frac{1}{2} (\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^2 \mathcal{F}^2(1, \eta^*) - \dots \right] \right\} = \\ = -(\eta^{*n} \dot{\eta}^*) + (\eta^{*n} \dot{\eta}^*)^2 \mathcal{F}(1, \eta^*) - \dots \quad (24b).$$

Despreciando términos de orden superior a los indicados, tenemos ecuaciones cuadráticas en $\dot{\eta}^*$ que al ser resueltas dan

$$\dot{\eta}^* = \begin{cases} - \frac{2 S_a}{\eta^{*n} [1 + \sqrt{1 + 4 S_a \mathcal{F}(1, \eta^*)}]} \\ - \frac{2 S_b B}{\eta^{*n} [1 + B \mathcal{F}(1, \eta^*) + \sqrt{[1 + B \mathcal{F}(1, \eta^*)]^2 + 4 S_b B [\mathcal{F}(1, \eta^*) + \frac{B}{2} \mathcal{F}^2(1, \eta^*)}]} \end{cases} \quad (25a,b)$$

donde la elección del signo de la raíz responde a que $\dot{\eta}^* < 0$. En esta expresión se ve claramente que la condición para pasar del caso b) al a) es tomar $\frac{B}{S_b} \rightarrow 0$ condicionado a $S_b B = \text{cte} = S_a$ (es decir, desplazándose en el plano $S_b B$ sobre la hipérbola $S_b B = \text{cte}$).

La convergencia de las series (22) y (24a,b) determina la existencia de la solución. Usando (13) y (25a,b) es inmediato determinar el tiempo que demora el frente de congelamiento en llegar a la posición η^* :

$$F_o = F_o(\eta^*) = - \int_{\eta^*}^1 \frac{d\eta^*}{\dot{\eta}^*} \quad (26).$$

La función inversa de ésta da $\eta^* = \eta^*(F_o)$, que reemplazada en (22) o (23) da el campo de temperaturas $\theta = \theta(\eta, F_o)$. El flujo de calor al exterior para el caso b) viene dado por (12b):

$$\frac{\partial \theta_b}{\partial \eta} = B [1 - \theta_b(1, F_o)].$$

ADEMÁS $\theta(1, F_o) = \theta_w$, es decir la temperatura de extracción del calor.

La fracción de masa sólida sobre la masa total del mcf es $f = 1 - \eta^{*n+1} = f(F_0)$. Además, (26) permite hallar el tiempo de congelación total $F_0(0)$.

4- Resultados analíticos:

La expresión (26) conduce a integrales resolubles analíticamente en los casos $n = 0$ (a y b) y $n = 1$ (a). En los restantes casos es necesario realizar integración numérica. Los resultados son:

$$n=0, a) \quad F_0(\eta^*) = \frac{1}{12 S_a^2} \left\{ 6 S_a (1-\eta^*) + [4 S_a (1-\eta^*) + 1]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \quad (27)$$

$$n=0, b) \quad F_0(\eta^*) = \frac{1}{B^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{1+2S_b}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2S_b}} \right) - \frac{1}{2S_b} + \frac{[1+B(1-\eta^*)]}{4S_b} \left[1 + B(1-\eta^*) + \sqrt{1+2S_b} \sqrt{[1+B(1-\eta^*)]^2 - \left(\frac{2S_b}{1+2S_b} \right)} - \frac{1}{2\sqrt{1+2S_b}} \cdot \ln \left[1+B(1-\eta^*) + \sqrt{[1+B(1-\eta^*)]^2 - \left(\frac{2S_b}{1+2S_b} \right)} \right] \right] \right\} \quad (28)$$

$$n=1, a) \quad F_0(\eta^*) = \frac{1}{4S_a} \left[2 - \eta^{*2} (1 + \sqrt{1-4S_a \ln \eta^*}) \right] + \sqrt{\frac{\pi}{32S_a}} \exp\left(\frac{1}{2S_a}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{2S_a} - 2 \ln \eta^*}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{1}{2S_a}}\right) \right] \quad (29)$$

En el primero de estos casos, definiendo $\mu = \sqrt{4S_a(1-\eta^*)+1}$ se obtiene una ecuación cúbica que una vez resuelta da en forma explícita $\eta^* = \eta^*(F_0)$. La ecuación (29) reproduce el resultado de Shamsundar y Sparrow.

Es interesante notar que para $S \rightarrow 0$, los resultados (27), (28) y (29) en $\eta^* = 0$ conducen a las fórmulas asintóticas

$$n=0, a) \quad (F_0(0))_{S_a \rightarrow 0} \approx \frac{1}{S_a}$$

$$n=0, b) \quad (F_0(0))_{S_b \rightarrow 0} \approx \frac{1}{S_b} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{B} \right)$$

$$n=1, a) (F_0(0))_{S_a \rightarrow 0} \approx \frac{1}{2S_a} \quad ;$$

esto es obvio por ejemplo para (27), bastando aproximar para S pequeño $(4S+1)^{3/2} \approx 1+6S$. En los restantes casos, usando (26) con las expresiones asintóticas de (25a,b)

$$(\dot{\eta}^*)_{S \rightarrow 0} \approx \begin{cases} -\frac{S_a}{\eta^{*n}} \\ -\frac{S_b B}{\eta^{*n} [1 + B \xi(1, \eta^*)]} \end{cases}$$

se tiene

$$(F_0(0))_{S \rightarrow 0} = - \int_0^1 \frac{d\eta^*}{(\dot{\eta}^*)_{S \rightarrow 0}}$$

de donde resultan las fórmulas asintóticas (válidas para $n = 0, 1$ ó 2)

$$a) (F_0(0))_{S_a \rightarrow 0} \approx \frac{1}{(n+1) S_a} \quad (30a,b)$$

$$b) (F_0(0))_{S_b \rightarrow 0} \approx \frac{1}{(n+1) S_b} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{B} \right)$$

De estas fórmulas se deduce el tiempo necesario para el total congelamiento del ecf cuando el calor específico c es despreciable:

$$a) (t(0))_a = \frac{\lambda \rho R}{(n+1) \dot{J}_0} \quad (31a,b),$$

$$b) (t(0))_b = \frac{\lambda \rho R^2}{(n+1) k (T_c - T_\infty)} \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{hR} \right)$$

como era de esperar.

5- Resultados numéricos:

Por razones prácticas, la cobertura sistemática de los valores posibles de los parámetros S_a , S_b y B se debe limitar a los rangos que con mayor probabilidad se presentan en problemas concretos; los autores consideran suficientemente amplios los rangos

$$a) 10^{-2} \leq S_a \leq 10^2$$

$$b) 10^{-2} \leq S_b \leq 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq B \leq 10^2.$$

Como ejemplo concreto del uso de las ecuaciones desarrolladas, se ha tomado un caso de transferencia convectiva con $S_b = 0,188$, $B = 1,28$. Los resultados de calcular $|\dot{\eta}^*| = |\dot{\eta}^*(F_0)|$ se dan en la fig-3 para los casos plano, cilíndrico y esférico. Del análisis de la figura se deduce que en el caso plano $|\dot{\eta}^*|$ disminuye monótonamente debido al engrosamiento de la capa sólida, que dificulta la conducción del calor; en el caso esférico $|\dot{\eta}^*|$ aumenta monótonamente debido al efecto de curvatura de la superficie de extracción del calor; en el caso cilíndrico predomina inicialmente el efecto de engrosamiento de la capa sólida y finalmente el de curvatura. La fig-4 muestra $F_0 = F_0(\eta^*)$ para geometría cilíndrica ($n=1$); la fig-5 muestra el campo de temperaturas $\theta = \theta(\eta)$ para distintos tiempos F_0 (o posiciones η^* del frente de congelamiento) en la misma geometría; la fig-6 muestra $\theta_w = \theta_w(\eta)$ y $\partial\theta_w/\partial\eta(F_0)$ (el flujo de calor en la superficie del ecf) y la fig-7 muestra $\theta_w = \theta_w(f)$ siendo f la fracción del mcf en estado sólido. Esta última gráfica es idéntica a la que aparece en la fig-1 del trabajo de Shamsundar y Sparrow.

La fig-8 muestra el tiempo de congelación total $F_0(0)$ en función de S para el caso a), con $n=0,1$ y 2 ; es notable que el tiempo disminuye al aumentar n (es decir, al aumentar la superficie de extracción de calor respecto del volumen del ecf). Curvas similares se obtienen en función de S para el caso b), utilizando B como parámetro. En cualquiera de ambos casos, sería aconsejable realizar un ajuste parabólico por mínimos cuadrados del tipo

$$\lg [F_0(0)] = u (\lg S)^2 + v \lg S + w$$

con u , v y $w = \lg x$ a determinarse, y tabular estos coeficientes en función de B , de modo que

$$[F_0(0)]_S = x S^{u \lg S + v}$$

La influencia del error cometido al despreciar términos de orden superior en (24a,b) se ha estimado haciendo uso del coeficiente C_3 dado por (21); así por ejemplo se puede estimar el error en θ por

$$E_\theta = \frac{C_3 F^2(\eta, \eta^*)}{C_1 + C_2 F(\eta, \eta^*)}$$

Recalcamos que este valor es sólo un estimador y no una cota del e-

error. El análisis de las fórmulas obtenidas y de los resultados numéricos ha conducido a estimar que el error cometido por el truncamiento de las series es en general suficientemente pequeño (por ejemplo, menor que el 5% en el caso de las temperaturas θ) para cualquier valor de η^* en el caso $n = 0$ y para $\eta^* > 0,1$ en los casos $n = 1,2$; esto significa además que el cálculo del tiempo de congelamiento total $F_0(0)$ se ve poco afectado.

Finalmente se concluye que el uso de la fórmula (23) en lugar de la (22) para el cálculo de θ , θ_w y $\partial\theta_b/\partial\eta$ es aceptable dentro de a lo sumo un 5% de diferencia en las siguientes condiciones:

Caso		Condición
$n = 0$	a	$S_a < 1$
	b	$S_b < (1/B)$
$n = 1$	a	$S_a < 0,5$
	b	$S_b < (0,5/B)$
$n = 2$	a	$S_a < 0,2$
	b	$S_b < (0,2/B)$

REFERENCIAS

- [1]- Alanís E., Rovetta L., Castro J., Saravia L.; Actas de la 2a. Reunión de Trabajo de Energía Solar, ASADES-UNSA; Salta, Julio 1976; "Acumulación de calor por cambio de fase; estado actual de la tecnología y resultados preliminares".
- [2]- Saravia L., Alanís E., Rovetta L., Castro J., De Paul I., de Saravia D.; Actas de la 3a. Reunión de Trabajo de Energía Solar, ASADES-IADIZA; Mendoza, Octubre 1977; "Diseño de acumuladores térmicos por cambio de fase".
- [3]- Shamsundar N., Sparrow E.; Journal of Heat Transfer, Trans. of the ASME; November 1974; "Storage of thermal energy by solid-liquid phase change; temperature drop and heat flux".
- [4]- Megerlin F.; Forsch. Ing. - Wes., Vol. 34, 1968, p. 40; "Geometrisch eindimensionale Wärmeleitung beim Schmelzen und Ers-

tarren".

- [5] - Telkes M.; Proc. Workshop on Solar Energy Storage for Heating and Cooling of Buildings, NSF/RA/N/75/041, Charlottesville, VA.; April 1975; "Thermal storage for Solar Energy heating and cooling".

fig-1 Muestra las geometrías a considerar en el presente trabajo, sus idealizaciones y sistemas de coordenadas elegidos para describir cada caso.

fig-2 Muestra la nomenclatura a usar y la forma de la ecuación del calor para cada geometría de interés.

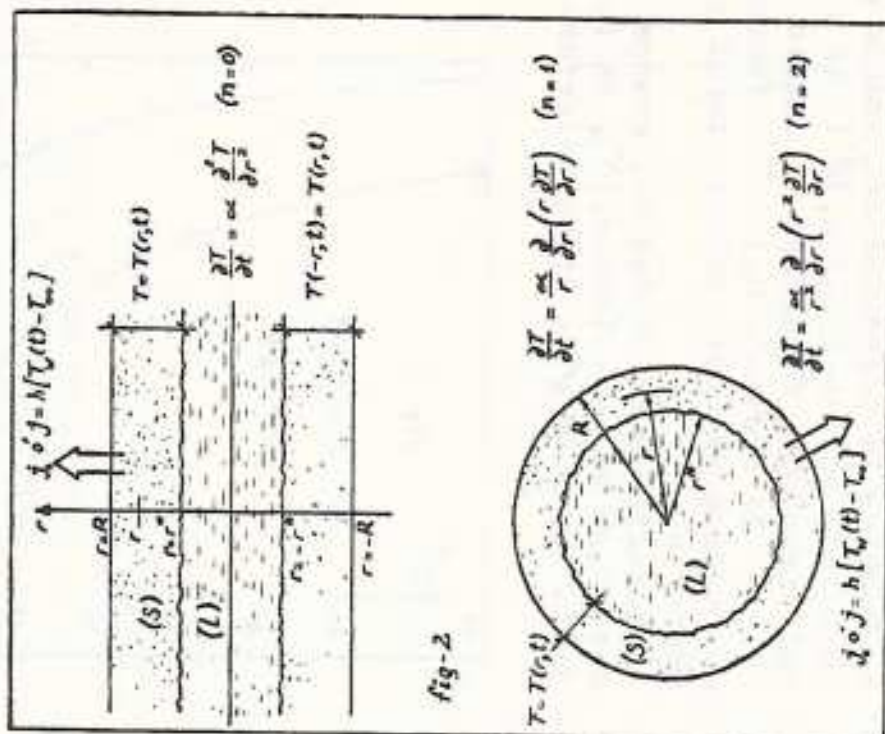
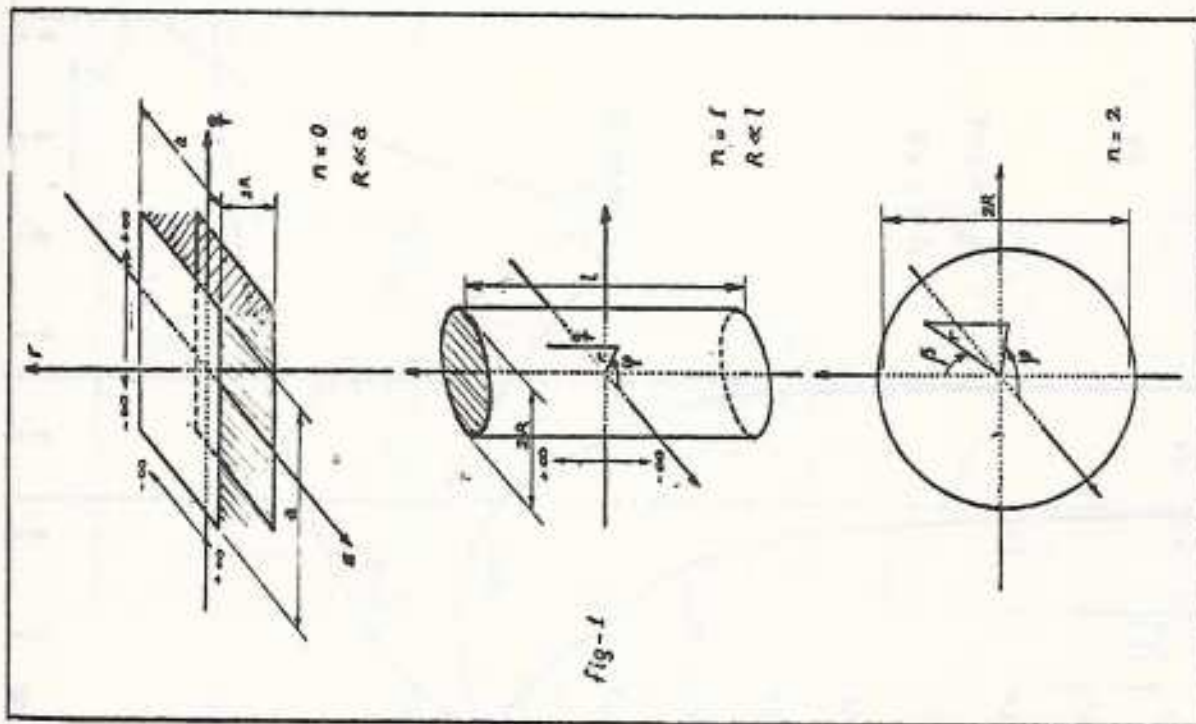


fig-3 a) Muestra la celeridad del avance de la interfase sólido-líquido, $|\dot{\eta}^*|$, en función del tiempo τ_0 . Obsérvese el cambio de escala en la ordenada 0,3 y la disminución del tiempo de congelamiento total al aumentar n .

b) Muestra la celeridad del avance de la interfase sólido-líquido, $|\dot{\eta}^*|$, en función de la posición η^* de dicha interfase.

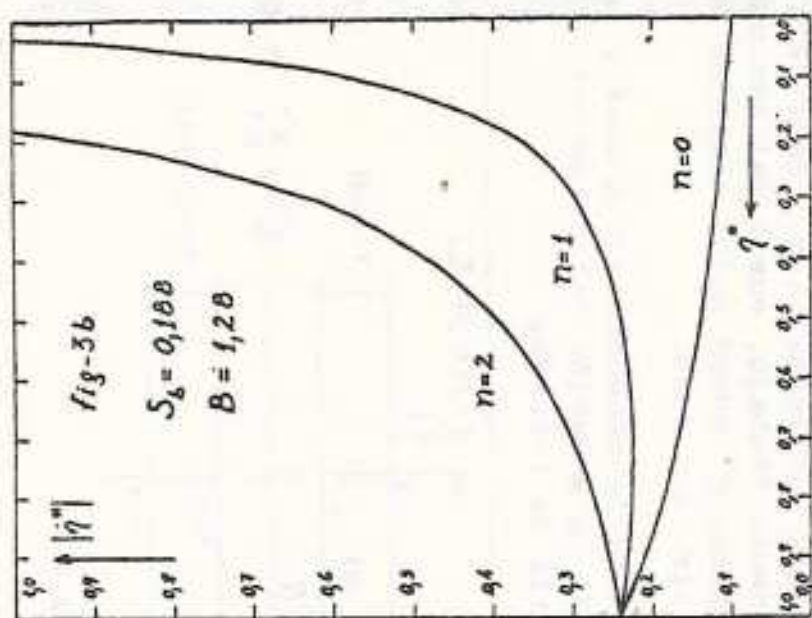
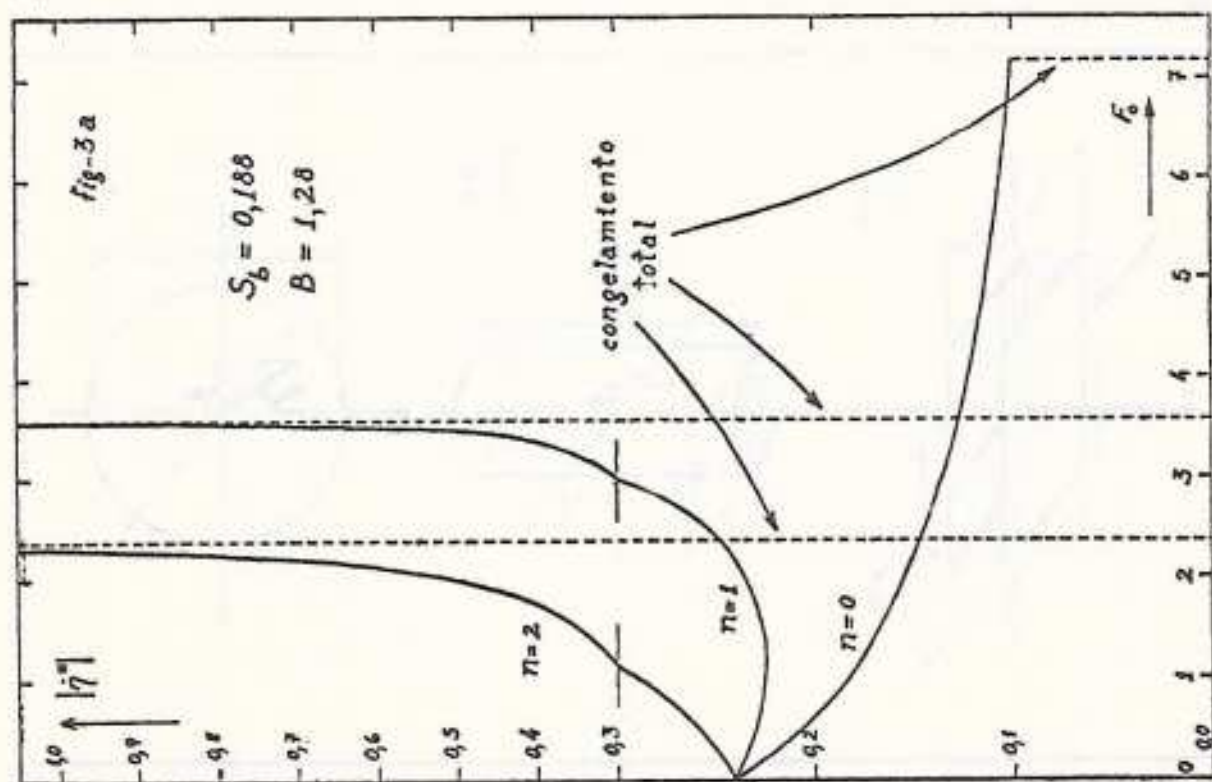


fig-4 a, b y c) Muestra el tiempo F_0 en función de la posición de la interfase sólido-líquido, η^* , para geometría plana, cilíndrica y esférica ($n = 0, 1$ y 2).

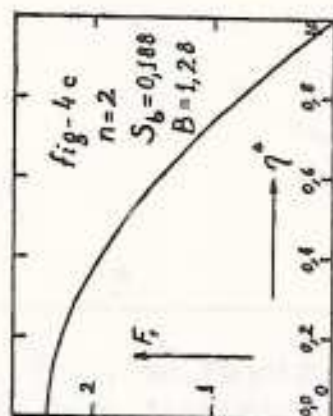
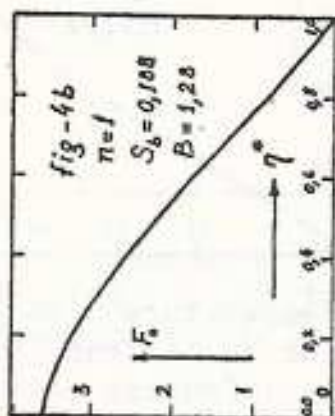
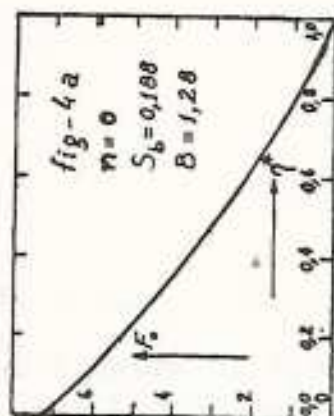
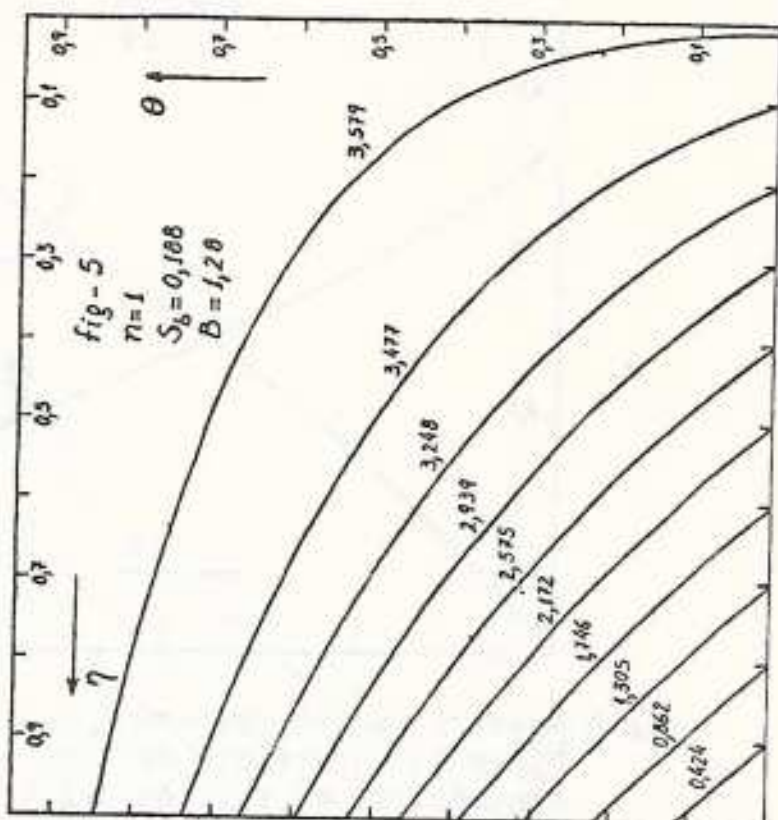


fig-5 Muestra el campo de temperaturas $\theta = \theta(\eta)$ para distintos tiempos F_0 (indicados como parámetros numéricos al costado de cada curva) en el caso cilindrico conveectivo. Para el tiempo de congelamiento total $F_0(0) = 3,58$ las curvas degeneran en el ángulo superior derecho de la figura.



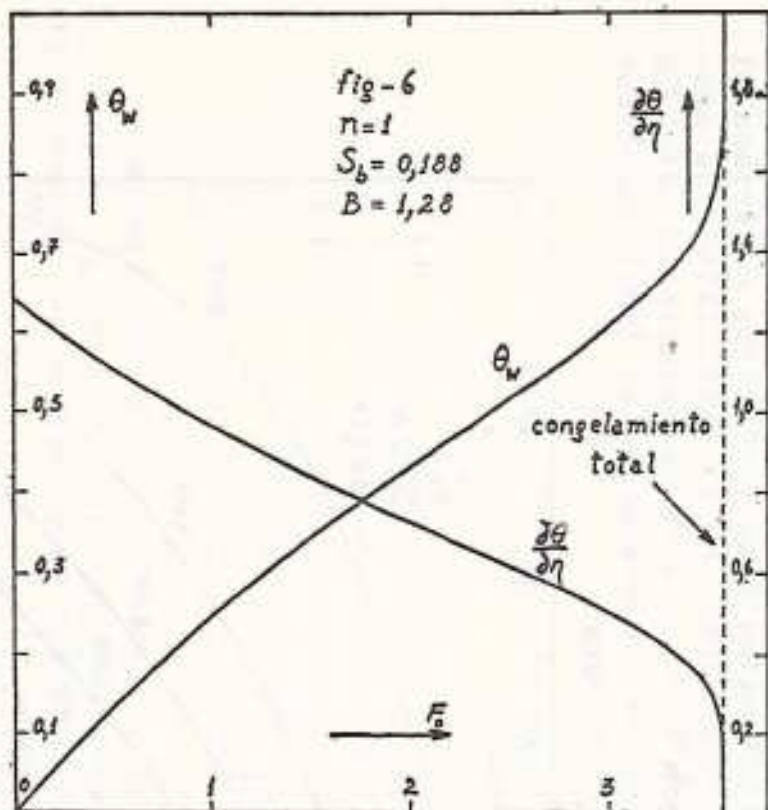


fig-6 Muestra la temperatura θ_w y el flujo de calor $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ en la superficie del ecf (caso cilíndrico convectivo) en función del tiempo F_0 .

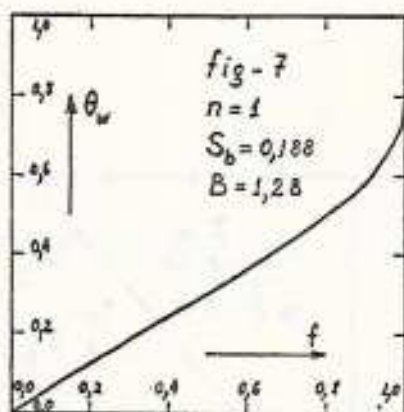


fig-7 Muestra la temperatura θ_w en la superficie del ecf en función de la fracción de mcf en estado sólido (caso cilíndrico convectivo).

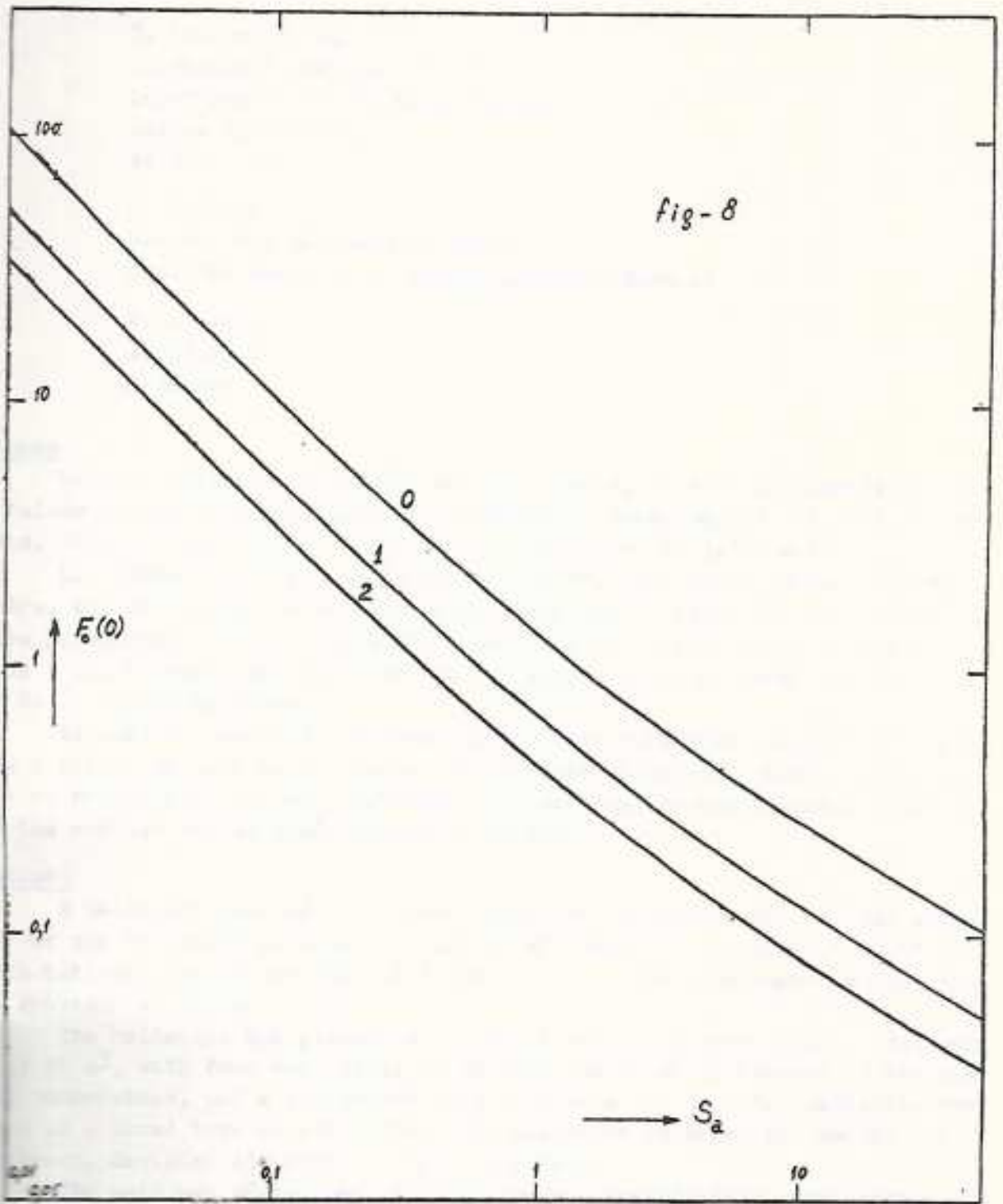


Fig-8 Muestra el tiempo de congelación total, $F_0(0)$, en función de S (caso de flujo calórico constante) para distintas geometrías, señaladas con el valor del índice n junto a cada curva.